ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

TRẦN HUY THỤY

BẤT ĐẲNG THỨC LIÊN QUAN ĐẾN NHIỀU TAM GIÁC

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Thái Nguyên - 2016

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

TRẦN HUY THỤY

BẤT ĐẲNG THỨC LIÊN QUAN ĐẾN NHIỀU TAM GIÁC

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Chuyên ngành: Phương pháp Toán sơ cấp
Mã số: 60 46 01 13

NGƯỜI HƯỚNG DẪN KHOA HỌC
TS. NGUYỄN VĂN NGỌC

Thái Nguyên - 2016

Mục lục

Danh mục ký hiệu

ABC	Tam giác ABC
a, b, c	Độ dài các cạnh BC, CA, AB
Δ	Diện tích tam giác
s	Nửa chu vi tam giác
m_a, m_b, m_c	Độ dài các trung tuyến ứng với các cạnh a, b, c
w_a, w_b, w_c	Độ dài các phân giác ứng với các cạnh a, b, c
h_a, h_b, h_c	Độ dài các đường cao ứng với các cạnh a, b, c
r, R	Bán kính đường tròn nội tiếp, ngoại tiếp
r_a, r_b, r_c	Bán kính đường tròn bàng tiếp ứng với các cạnh a, b, c
$\sum a$	Tổng $a + b + c$
$\sum a^2$	Tổng $a^2 + b^2 + c^2$
$\sum(a^2a'^2)$	Tổng $a^2a'^2 + b^2b'^2 + c^2c'^2$
$\sum \cot A$	Tổng $\cot A + \cot B + \cot C$
$\{E\}$	"Đẳng thức xảy nếu và chỉ nếu tam giác ABC là tam giác đều"
$\{S_n\}$	"Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi n tam giác là đồng dạng".

Mở đầu

Bất đẳng thức liên quan đến hai hay nhiều tam giác, hoặc một dãy các tam giác cho biết mối quan hệ mật thiết nào đó giữa các đại lượng của các tam giác. Các bất đẳng thức này thuộc loại khó và có số lượng rất khiêm tốn so với các bất đẳng thức trong một tam giác.

Cho tam giác ABC, với a, b, c là các cạnh, s, R, r và Δ lần lượt là nửa chu vi, bán kính đường tròn ngoại tiếp, bán kính đường tròn nội tiếp, và diện tích. w_a, w_b, w_c lần lượt là các phân giác trong của các góc, và h_a, h_b, h_c lần lượt là các chiều cao. Tương tự, đối với tam giác $A'B'C'$, độ dài các cạnh và các đại lượng khác được ký hiệu là $a', b', c', ...$

Đã có một thời gian dài các học giả nghiên cứu về bất đẳng thức giữa hai tam giác. Hai trong những bất đẳng thức nổi tiếng đó là bất đẳng thức của Neuberg–Pedoe [5]

$$a'^2(b^2 + c^2 - a^2) + b'^2(c^2 + a^2 - b^2) + c'^2(a^2 + b^2 - c^2) \geq 16\Delta\Delta'$$

và bất đẳng thức Klamkin [2]

$$a'^2 + b'^2 + c'^2 \geq (-1)^{n+1}(2a'b' \cos nC + 2b'c' \cos nA + 2c'a' \cos nB).$$

Gần đây, các học giả Trung Quốc đã tìm thêm một số bất đẳng thức mới liên quan hai tam giác (xem [5]). Chẳng hạn như, Zhang và Gao đã chứng minh bất đẳng thức như sau đây

$$a^2a'^2 + b^2b'^2 + c^2c'^2 \geq 16\Delta\Delta',$$

$$a'(b + c - a) + b'(c + a - b) + c'(a + b - c) \geq \sqrt{48\Delta\Delta'}.$$

Mục đích của đề tài luận văn là tìm hiểu và học tập về các bất đẳng thức liên quan đến nhiều tam giác, từ đó hình thành một số chuyên đề phục vụ cho công tác giảng dạy và bồi dưỡng Toán cho các học sinh ở bậc THPT. Trong luận văn này, tên gọi của các chương, các mục và các tiểu mục là do chúng tôi tự đặt ra để cho phù hợp với nội dung tương ứng.

Luận văn có bố cục: Mở đầu, hai chương, Kết luận và Tài liệu tham khảo.

Chương 1: *Bất đẳng thức đối với hai tam giác* trình bày các bất đẳng thức đối với hai tam giác có liên quan đặc biệt nào đó (tam giác Trực tâm, tam giác Trung tuyến), các bất đẳng thức liên quan đến các đại lượng độ dài, diện tích và các góc của hai tam giác bất kỳ (các bất đẳng thức Barrow-Tomescu-Klamkin, Pedoe, ...).

Chương 2: *Các bất đẳng thức liên quan đến nhiều tam giác* trình bày các bất đẳng thức liên quan đến nhiều tam giác. Các vấn đề được trình bày trong chương này có thể tóm lược như sau.

Trước hết là các bất đẳng thức liên quan đến dãy các tam giác. Bắt đầu với tam giác ABC, chúng ta liên tục xây dựng dãy các tam giác $(A_nB_nC_n)_{n\in N}$, với $A_0B_0C_0 = ABC$ và số đo góc và độ đo cạnh được định nghĩa một cách đệ quy bởi

$$
\begin{aligned}
&A_{n+1} = \frac{\pi - A_n}{2},\ \ B_{n+1} = \frac{\pi - B_n}{2},\ \ C_{n+1} = \frac{\pi - C_n}{2},\\
&a_{n+1} = \sqrt{a_n(b_n + c_n - a_n)},\ \ b_{n+1} = \sqrt{b_n(c_n + a_n - b_n)},\\
&c_{n+1} = \sqrt{c_n(a_n + b_n - c_n)}.
\end{aligned}
$$

Tiếp đó, giả sử rằng A_i, B_i, C_i $(i = 0, 1, ..., n-1)$ là n tam giác với độ dài các cạnh a_i, b_i, c_i. Xét tam giác $A_nB_nC_n$, có các cạnh a_n, b_n, c_n được định nghĩa bởi các phương trình

$$a_n^2 = \sum_0^{n-1} a_i^2,\ \ b_n^2 = \sum_0^{n-1} b_i^2,\ \ c_n^2 = \sum_0^{n-1} c_i^2.$$

Sau cùng, xét các bất đẳng thức giữa tam giác ABC và n tam giác $A_iB_iC_i$ liên quan với nhau theo hệ thức

$$a = \sum_i w_i a_i, \quad b = \sum_i w_i b_i, \quad c = \sum_i w_i c_i,$$

hoặc

$$A = \sum_i w_i A_i, \quad B = \sum_i w_i B_i, \quad C = \sum_i w_i C_i,$$

trong đó w_i là các số dương cho trước với $\sum_i w_i = 1$.

Trong suốt quá trình học tập và làm luận văn, bên cạnh sự nỗ lực học tập, nghiên cứu của bản thân là sự hướng dẫn tận tình của Thầy hướng dẫn: TS Nguyễn Văn Ngọc, Trường Đại học Thăng Long. Em xin được bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc nhất đến Thầy.

Em cũng xin được gửi lời cảm ơn chân thành nhất đến Ban Giám hiệu, Phòng Đào tạo, Khoa Toán - Tin của Trường Đại học Khoa học, Đại học Thái Nguyên, các thầy, các cô giảng dạy lớp cao học toán K8YB đã trang bị kiến thức, tạo điều kiện thuận lợi trong suốt quá trình em học tập tại Trường cũng như quá trình làm luận văn.

Em xin cảm ơn các thầy, cô trong Ban giám hiệu, các đồng nghiệp trường Trung học Phổ thông trường THPT Mù Cang Chải, Yên Bái nơi mà em đang công tác đã luôn tạo điều kiện giúp đỡ và động viên. Xin cảm ơn bạn bè và các học viên trong lớp cao học toán K8YB đã luôn quan tâm, động viên, giúp đỡ em trong suốt thời gian học tập và quá trình làm luận văn.

Sự quan tâm, động viên và khích lệ của gia đình cũng là nguồn động viên lớn để em hoàn thành khóa luận này.

Thái Nguyên, tháng 5 năm 2016

Tác giả

Trần Huy Thụy

Chương 1

Bất đẳng thức đối với hai tam giác liên quan

Chương này trình bày một số kiến thức bổ trợ về bất đẳng thức của dãy số và về tam giác, các bất đẳng thức đối với hai tam giác có liên quan đặc biệt nào đó (tam giác trực tâm, tam giác trung tuyến), các bất đẳng thức liên quan đến các đại lượng độ dài, diện tích và các góc của hai tam giác bất kỳ (Các bất đẳng thức Barrow-Tomescu-Klamkin, Pedoe,.... Nội dung cơ bản của Chương này được hình thành chủ yếu từ các tài liệu [3-5].

1.1 Kiến thức bổ trợ

1.1.1 Các bất đẳng thức cơ bản

Các bất đẳng thức đại số được ứng dụng rất sâu rộng trong chứng minh bất đẳng thức hình học. Trong luận văn này xin trình bày lại một số bất đẳng thức đại số cơ bản nhất đó là bất đẳng thức $AM-GM$ (Arithmetic Mean - Geometric Mean), bất đẳng thức Cauchy - Schawrz, bất đẳng thức Chebyshev...

Định lý 1.1. (Bất đẳng thức $AM-GM$). *Với n số thực không âm bất kì $a_1, a_2, \ldots, a_n$, ta có bất đẳng thức*

$$\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} \geqslant \sqrt[n]{a_1.a_2.\ldots.a_n}.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$.

Hệ quả 1.1. (Bất đẳng thức $GM - HM$). *Với mọi bộ số dương ta đều có*

$$\sqrt[n]{a_1.a_2.\ldots.a_n} \geqslant \frac{n}{\dfrac{1}{a_1} + \dfrac{1}{a_2} + \ldots + \dfrac{1}{a_n}}.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$.

Hệ quả 1.2. *Với mọi bộ số dương* $a_1, a_2, \ldots, a_n$ *ta đều có*

$$\frac{1}{n}\Big(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_n}\Big) \geqslant \frac{n}{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$.

Hệ quả 1.3. *Với mọi bộ số không âm* $a_1, a_2, \ldots, a_n$ *và* $m = 1, 2, \ldots$ *ta đều có*

$$\frac{a_1^m + a_2^m + \ldots + a_n^m}{n} \geqslant \Big(\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}\Big)^m.$$

Định lý 1.2. (Bất đẳng thức Cauchy - Schawrz). *Xét hai bộ số thực tùy ý* $a_1, a_2, \cdots, a_n$ *và* $b_1, b_2, \cdots, b_n$. *Khi đó ta có*

$$(a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n)^2 \leqslant (a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_n^2).$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\dfrac{a_1}{b_1} = \dfrac{a_2}{b_2} = \cdots = \dfrac{a_n}{b_n}$, *(với quy ước nếu mẫu bằng 0 thì tử cũng bằng 0).*

Định lý 1.3. (Bất đẳng thức Chebyshev).

1. *Nếu* $(a_1, a_2, ..., a_n)$ *và* $(b_1, b_2, ..., b_n)$ *là hai dãy số đồng dạng (cùng đơn điệu tăng hoặc cùng đơn điệu giảm) thì*

$$\frac{a_1b_1 + a_2b_2 + ... + a_nb_n}{n} \geq \Big(\frac{a_1 + a_2 + ... + a_n}{n}\Big)\Big(\frac{b_1 + b_2 + ... + b_n}{n}\Big). \tag{1.1}$$

2. *Nếu* $(a_1, a_2, ..., a_n)$ *và* $(b_1, b_2, ..., b_n)$ *là hai dãy ngược nhau (một dãy đơn điệu tăng, còn dãy kia đơn điệu giảm) thì*

$$\frac{a_1b_1 + a_2b_2 + ... + a_nb_n}{n} \leq \Big(\frac{a_1 + a_2 + ... + a_n}{n}\Big)\Big(\frac{b_1 + b_2 + ... + b_n}{n}\Big). \tag{1.2}$$